ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ & ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ (Α.Α.Τ.)

Εξισώσεις Α.Α.Τ. (χωρίς αρχική φάση)	$x = A\eta\mu\omega t$ $\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\omega t$ $\quad \upsilon_{max} = \omega A$ $a = -a_{max}\eta\mu\omega t$ $\quad \alpha_{max} = \omega^2 A$ Σχέση επιτάχυνσης – απομάκρυνσης $\alpha = -\omega^2 x$
Εξισώσεις Α.Α.Τ. (με αρχική φάση)	$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_o)$ $\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_o)$ $\quad \upsilon_{max} = \omega A$ $a = -a_{max}\eta\mu(\omega t + \varphi_o)$ $\quad \alpha_{max} = \omega^2 A$ Σχέση επιτάχυνσης – απομάκρυνσης $\alpha = -\omega^2 x$
Δύναμη στην Α.Α.Τ. (Δύναμη επαναφοράς)	Σώμα εκτελεί ΑΑΤ $\Longleftrightarrow$ $F = -Dx$ όπου $D = m\omega^2$ και x =*απομάκρυνση από τη ΘΙ*
Προσοχή στην προηγούμενη σχέση $F = F_{επαναφοράς} = \Sigma F$ *που ασκούνται στο σώμα που εκτελεί ΑΑΤ*	
Περίοδος Α.Α.Τ.	$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$, $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$
	Ενέργεια στην Α.Α.Τ.
Δυναμική ενέργεια	$U = \frac{1}{2}Dx^2$
Κινητική ενέργεια	$K = \frac{1}{2}m\upsilon^2$
Ολική ενέργεια	$E = \frac{1}{2}DA^2 = U_{max} = \frac{1}{2}m\upsilon_{max}^2 = K_{max}$

Δυναμική ενέργεια σε συνάρτηση με το χρόνο (Χωρίς $φ_ο$) **Κινητική ενέργεια σε συνάρτηση με το χρόνο**	$U=\frac{1}{2}DA^2\eta\mu^2\omega t$	ή $U=E\eta\mu^2\omega t$
	$K=\frac{1}{2}DA^2\sigma\upsilon\nu^2\omega t$	ή $K=E\sigma\upsilon\nu^2\omega t$
Κινητική ενέργεια σε συνάρτηση με την απομάκρυνση	$\Rightarrow$	$K=E-\frac{1}{2}Dx^2$
Δυναμική ενέργεια σε συνάρτηση με την ταχύτητα	$\Rightarrow$	$U=E-\frac{1}{2}m\upsilon^2$

Αρχή διατήρησης της ενέργειας ταλάντωσης	**ΑΔΕΤ**
Σε μια τυχαία θέση	$K + U = E = \frac{1}{2} DA^2 =$ σταθερή
Σε δύο τυχαίες θέσεις	$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 =$ σταθερή
Από την ΑΔΕΤ **<u>με απόδειξη</u>** έχω	$\upsilon=\pm\omega\sqrt{A^2-x^2}$ **και** $a=\pm\omega\sqrt{\upsilon_{\mu\alpha\chi}^2-\upsilon^2}$
ΡΥΘΜΟΙ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ	
Ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας	$\frac{dK}{dt}=\frac{dW_{\Sigma F}}{dt}=\frac{\Sigma F\cdot dx}{dt}=\pm\ \Sigma F\cdot\upsilon$
Ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας	$\frac{dU}{dt}=-\frac{dK}{dt}$
Ρυθμός μεταβολής της μετατόπισης Ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας Ρυθμός μεταβολής της ορμής	$\frac{dx}{dt}=\upsilon$, $\frac{d\upsilon}{dt}=\alpha$, $\frac{dp}{dt}=\Sigma F$

Ποσοστό *μεταβολής* φυσικού μεγέθους	$\pi\% = \frac{\tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\acute{\eta}\ \tau\iota\mu\acute{\eta} - \alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{\eta}\ \tau\iota\mu\acute{\eta}}{\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{\eta}\ \tau\iota\mu\acute{\eta}} \cdot 100\%$
ΕΛΑΤΗΡΙΑ	
Νόμος του Hook	$\boldsymbol{F_{\varepsilon\lambda} = k \cdot \Delta\ell}$ $\Delta\ell$ = απόσταση από τη ΘΦΜ ή $\Delta\ell$ = επιμήκυνση ή συσπείρωση του ελατηρίου
Δυναμική ενέργεια του ελατηρίου	$U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2} k \cdot \Delta\ell^2$
Έργο της δύναμης του ελατηρίου	$W_{F\varepsilon\lambda} = U_{\alpha\rho\chi}^{\varepsilon\lambda} - U_{\tau\varepsilon\lambda}^{\varepsilon\lambda}$
Έργο της δύναμης του βάρους	$W_W = U_{\alpha\rho\chi}^{\beta\alpha\rho} - U_{\tau\varepsilon\lambda}^{\beta\alpha\rho}$
Βαρυτική δυναμική ενέργεια	$U_{\beta\alpha\rho} = mgh$
Προσοχή επειδή η δύναμη $F_{\varepsilon\pi\alpha\nu\alpha\varphi o\rho\acute{\alpha}\varsigma}$ είναι συντηρητική δύναμη,όπως το βάρος W και η $\boldsymbol{F_{\varepsilon\lambda}}$,το έργο της υπολογίζεται με τον ίδιο τρόπο	$W_{F\varepsilon\pi\alpha\nu\alpha\varphi} = U_{\alpha\rho\chi}^{\tau\alpha\lambda\acute{\alpha}\nu\tau\omega\sigma\eta\varsigma} - U_{\tau\varepsilon\lambda}^{\tau\alpha\lambda\acute{\alpha}\nu\tau\omega\sigma\eta\varsigma}$ ή με τη χρήση του ΘΜΚΕ $W_{F\varepsilon\pi\alpha\nu\alpha\varphi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi}$

►Κάθε ελατήριο θεωρείται ιδανικό δηλαδή αμελητέας μάζας ($m_{\varepsilon\lambda}$=0) και ότι υπόκειται σε ελαστικές παραμορφώσεις.

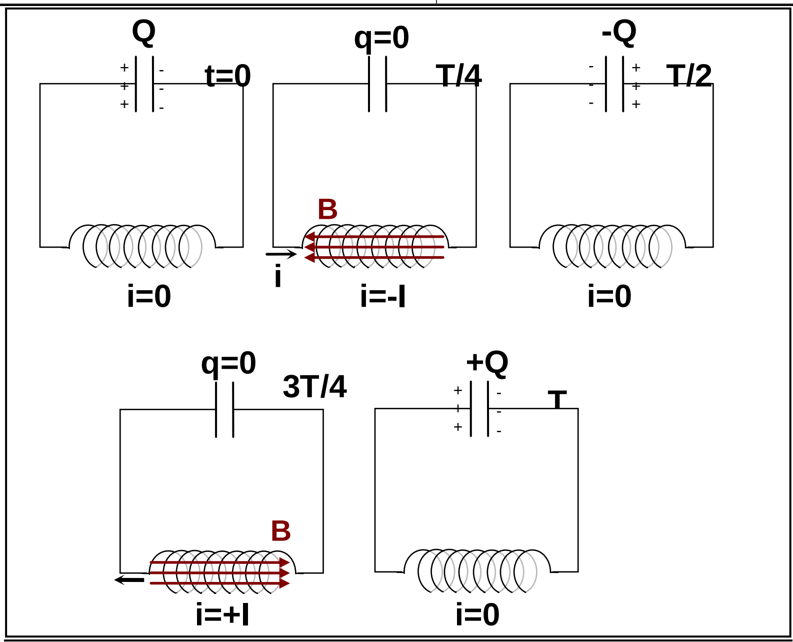
► Στις ασκήσεις με ελατήρια πάντα σχεδιάζουμε το ελατήριο

① στη ΘΦΜ,
② μετά στη ΘΙ,
③ στην τυχαία θέση ΤΘ , αν θέλουμε να δείξουμε ότι εκτελεί ΑΑΤ,
④ στην νέα θέση ισορροπίας ΝΘΙ (εφόσον έχω αλλαγή της ΘΙ μετά από πλαστική κρούση ή διάσπαση και το ελατήριο είναι κατακόρυφο ή σε κεκλιμένο επίπεδο) ,
⑤ και σε οποιαδήποτε άλλη θέση μου λέει το πρόβλημα (π.χ. εκτρέπω το σώμα από τη ΘΙ στη ΘΦΜ και το αφήνω ελεύθερο, οπότε η ΘΦΜ είναι ταυτόχρονα και ακραία θέση της ΑΑΤ που ακολουθεί).

ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ	
Εξισώσεις	$q = Q\sigma\upsilon\nu\omega t$ $i = -I\eta\mu\omega t$ $I = Q\omega$ εφόσον την **t = o q = +Q** και **i = o**
Περίοδος	$T = 2\pi\sqrt{LC}$
Συχνότητα	$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$
Γωνιακή συχνότητα	$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
Ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου Ενέργεια μαγνητικού πεδίου Ολική ενέργεια	$\boxed{U_E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\sigma\upsilon\nu^2\omega t = \boxed{E\sigma\upsilon\nu^2\omega t}$ $\boxed{U_B = \frac{1}{2}Li^2} = \frac{1}{2}LI^2\eta\mu^2\omega t = \boxed{E\eta\mu^2\omega t}$ $E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}LI^2$ **ή** $E = U_{Emax} = U_{Bmax} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}LI^2$
Αρχή διατήρησης της ενέργειας	$U_E + U_B = E$ ή $\frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2 = E$
Σχέση i, q (με απόδειξη)	$i = \pm\,\omega\sqrt{Q^2 - q^2}$ (από ΑΔΕΤ)
Χωρητικότητα πυκνωτή	$C = \frac{q}{V_c}$ ή $C = \frac{Q}{V_{Cmax}}$
Στιγμιαία τάση στα άκρα του πυκνωτή	$V_C = \frac{q}{C} \Rightarrow V_C = \frac{Q\sigma\upsilon\nu\omega t}{C} \Rightarrow V_C = V_{Cmax}\sigma\upsilon\nu\omega t$
Η.Ε.Δ από αυτεπαγωγή	$E_{\alpha\upsilon\tau\epsilon\pi} = -L\frac{\Delta i}{\Delta t} = V_L$
Κάθε χρονική στιγμή σε ένα κύκλωμα L,C ισχύει: $V_L = V_C$	

Αναλογίες Μηχανικής—Ηλεκτρικής Ταλάντωσης

Μηχανική Ταλάντωση	Ηλεκτρική Ταλάντωση
Απομάκρυνση x	Φορτίο q
Ταχύτητα υ	Ρεύμα i
Μάζα m	Συντελεστής αυτεπαγωγής πηνίου L
Σταθερά επαναφοράς D	1/C
Πλάτος A	Μέγιστο φορτίο Q
Επιτάχυνση α	Ρυθμός μεταβολής ρεύματος Δi/Δt
Δυναμική ενέργεια U	Ενέργεια U_E
Κινητική ενέργεια K	Ενέργεια U_B



Αν για t=0, q ≠ 0 και i ≠ 0 έχω φ_0:
Σε αντιστοιχία με τις μηχανικές ταλαντώσεις
$q = Q\eta\mu(\omega t+\varphi_0)$

$i = I\sigma\upsilon\nu(\omega t+\varphi_0)$

α) Ρυθμός μεταβολής του φορτίου: $\boxed{\dfrac{dq}{dt} = i}$

β) Ρυθμός μεταβολής της τάσης:

$C = \dfrac{q}{V_c}$ ή $V_c = \dfrac{q}{C}$ ή $\dfrac{dV_c}{dt} = \dfrac{1}{C}\cdot\dfrac{dq}{dt}$ ή $\boxed{\dfrac{dV_c}{dt} = \dfrac{i}{C}}$

γ) Ρυθμός μεταβολής της ενέργειας του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου του πυκνωτή:

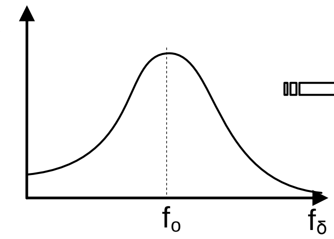
$$\frac{dU_E}{dt} = V_c i \qquad \frac{dU_B}{dt} = -\frac{dU_E}{dt} = -V_c i = -|V_L| i$$

δ) Ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος:

$V_L = V_C$ ή $-L\dfrac{di}{dt} = \dfrac{q}{C}$ ή $\boxed{\dfrac{di}{dt} = -\dfrac{q}{LC} = -\omega^2 q}$

Εξαναγκασμένη Ταλάντωση

Ένα σύστημα κάνει εξαναγκασμένη ταλάντωση όταν δρα πάνω του μία εξωτερική περιοδική δύναμη (διεγέρτης). Στην εξαναγκασμένη ταλάντωση το σύστημα έχει την συχνότητα f_δ του διεγέρτη και όχι την ιδιοσυχνότητά του f_o δηλαδή την συχνότητα της ελεύθερης ταλάντωσης. $\boldsymbol{f = f_{διεγέρτη}}$

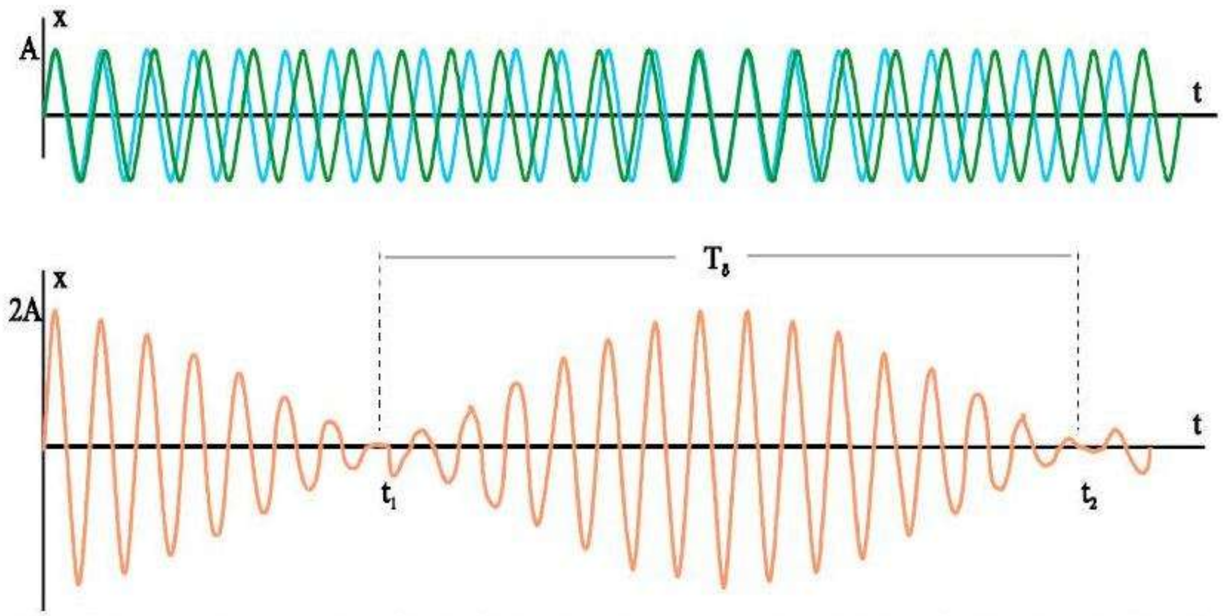
Συντονισμός	 Καμπύλη συντονισμού ⇒ $\boldsymbol{f_{διεγέρτη} = f_o}$ οπότε A = μέγιστο

ΦΘΙΝΟΥΣΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

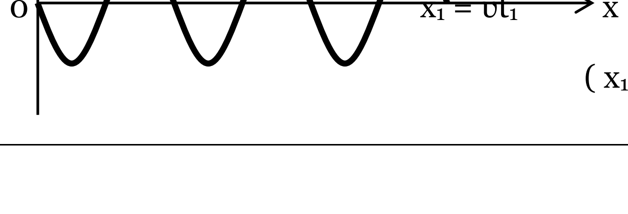
Δύναμη αντίστασης	$F' = -b\upsilon$
Συνισταμένη δύναμη	$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow \vec{F}_{αντ} + \vec{F}_{επαναφ} = m\vec{a} \rightarrow \quad -b\upsilon - Dx = ma$
Μείωση πλάτους	$\boxed{A = A_o e^{-\Lambda t}}$ αν $t = nT$ ο λόγος δύο διαδοχικών μέγιστων απομακρύνσεων είναι σταθερός : $\dfrac{A_o}{A_1} = \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{A_2}{A_3} = ... = \dfrac{A_{n-1}}{A_n} = \dfrac{A_n}{A_{n+1}} = ... = σταθ.$
Ενέργεια της φθίνουσας ταλάντωσης	$E = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}D\left(A_0 e^{-\Lambda t}\right)^2 = \frac{1}{2}DA_0^2\left(e^{-\Lambda t}\right)^2 \rightarrow \boxed{E = E_0 e^{-2\Lambda t}}$
Χρόνος υποδιπλασιασμού ή ημιζωής	$A = A_0 e^{-\Lambda t} \rightarrow \frac{A_0}{2} = A_0 e^{-\Lambda t_{1/2}} \rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\Lambda t_{1/2}} \rightarrow e^{\Lambda t_{1/2}} = 2 \rightarrow \Lambda t_{1/2} = \ln 2 \rightarrow$ $\boxed{t_{1/2} = \frac{\ell n 2}{\Lambda}}$
Όμοια στην ηλεκτρική ταλάντωση όπου αντί A βάζουμε Q	

ΣΥΝΘΕΣΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ

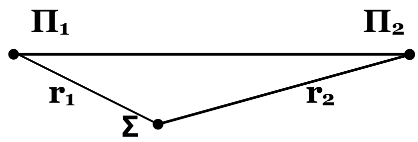
Σύνθεση δύο Α.Α.Τ. της ίδιας συχνότητας, που γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο στην ίδια διεύθυνση.	Αρχή της επαλληλίας : $x = x_1 + x_2$ $x_1 = A_1 \eta\mu\omega t$ & $x_2 = A_2 \eta\mu(\omega t + \varphi)$ $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\phi}$ $\varepsilon\phi\theta = \dfrac{A_2\eta\mu\phi}{A_1 + A_2\sigma\upsilon\nu\phi}$ τότε για τη συνισταμένη κίνηση: $x = A\,\eta\mu(\omega t+\theta)$
Σύνθεση δύο Α.Α.Τ. της ίδιας διεύθυνσης, γύρω από το ίδιο σημείο με το ίδιο πλάτος και διαφορετικές συχνότητες (Διακροτήματα)	$x_1 = A\eta\mu\omega_1 t$ & $x_2 = A\eta\mu\omega_2 t$ $x = 2A\sigma\upsilon\nu(\dfrac{\omega_1 - \omega_2}{2}t)\eta\mu(\dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}t)$ αν $\omega_1 \approx \omega_2 \approx \overline{\omega}$ $x = A'\eta\mu\overline{\omega}t$ συχνότητα διακροτήματος $f_\delta = \lvert f_1 - f_2 \rvert$
αν $\omega_1 \approx \omega_2 \approx \overline{\omega}$ για τη συνισταμένη κίνηση ισχύει:	$\boxed{\omega = \dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}} \rightarrow 2\pi f = \dfrac{2\pi f_1 + 2\pi f_2}{2} \rightarrow \boxed{f = \dfrac{f_1 + f_2}{2}}$ $T = \dfrac{1}{f}$ άρα $\boxed{T = \dfrac{2}{f_1 + f_2}}$



Σχ. 1.37 Από τη σύνθεση δύο ταλαντώσεων που οι συχνότητές τους διαφέρουν πολύ λίγο (πράσινη και μπλε γραμμή) προκύπτει ιδιόμορφη περιοδική κίνηση (κόκκινη γραμμή) που παρουσιάζει διακροτήματα.

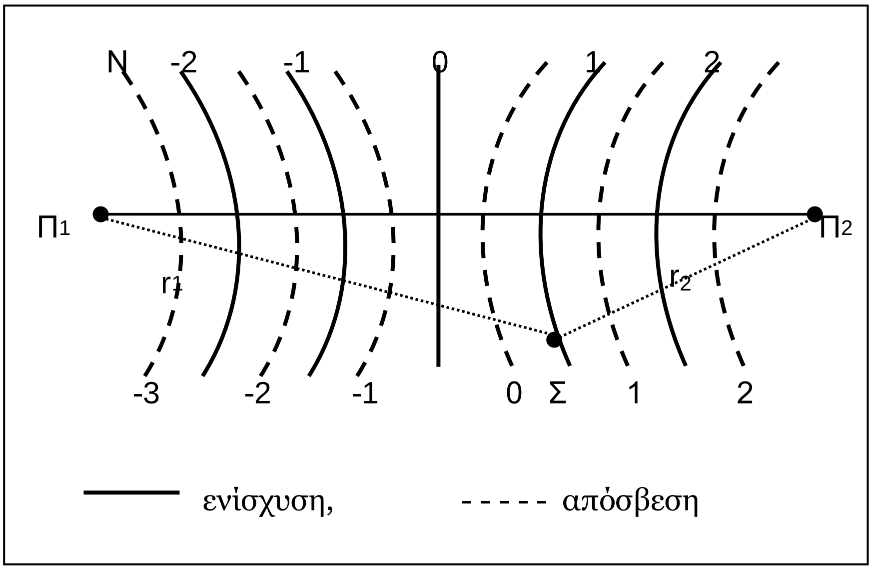
ΚΥΜΑΤΑ	
ΜΗΧΑΝΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ	
Ταχύτητα διάδοσης κύματος	$\upsilon = \frac{x}{t}$ θεμελιώδης εξίσωση της κυματικής $\boxed{\upsilon = \lambda f}$ Άρα $\upsilon = \frac{\lambda}{T}$
Εξίσωση ταλάντωσης της αρχής Ο (χωρίς φ_o)	$y = A\eta\mu\omega t$
Εξίσωση του αρμονικού κύματος	$y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ διάδοση προς τα θετικά $y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$ διάδοση προς τ' αρνητικά
Η ταχύτητα και η **επιτάχυνση** της **ταλάντωσης** ενός οποιουδήποτε σωματιδίου του μέσου διάδοσης ενός κύματος	$\upsilon = \omega A\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ ή $\boldsymbol{\upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - y^2}}$ $\alpha = -\omega^2 A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ ή $\boldsymbol{\alpha = -\omega^2 y}$
Φάση **φ** ενός κύματος που διαδίδεται στον θετικό ημιάξονα	$\boldsymbol{\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)}$
Κύμα με αρχική φάση (πηγή $y = A\eta\mu(\omega t + \phi_0)$)	$\boldsymbol{y = A\eta\mu\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_o\right]}$
Διαφορά φάσης Δφ της ταλάντωσης μεταξύ δύο τυχαίων σημείων του μέσου που απέχουν μεταξύ τους απόσταση Δx, την ίδια χρονική στιγμή t: $\boldsymbol{\Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda}}$	Η μεταβολή της φάσης ενός σημείου του μέσου δύο χρονικές στιγμές που διαφέρουν κατά Δt $\Delta\varphi = \omega\cdot\Delta t \Rightarrow$ $\boldsymbol{\Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta t}{T}}$
Στιγμιότυπο του κύματος *(για $t=t_1$)*	$y = A\eta\mu 2\pi\left(\sigma\tau\alpha\theta - \frac{x}{\lambda}\right)$
t_1	 $(x_1 = 12\lambda/4 = 3\lambda)$

ΣΥΜΒΟΛΗ ΤΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ

Απομάκρυνση των σημείων του μέσου  	Αρχή της επαλληλίας : $y = y_1 + y_2$ ▸ Για $0 \le t < t_1 = \frac{r_1}{\upsilon}$ είναι $\mathbf{y = 0}$ ▸ Για $t_1 \le t < t_2 = \frac{r_2}{\upsilon}$ είναι $\mathbf{y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right)}$ ▸ Για $t \ge t_2$ είναι $\mathbf{y = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{r_1 - r_2}{2\lambda}\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right)}$ τότε έχω συμβολή και των δύο κυμάτων στο σημείο Σ.
Εξίσωση απομάκρυνσης ενός σημείου στο οποίο συμβάλλουν δύο σύγχρονα αρμονικά κύματα, διαφορετικής διεύθυνσης	$y = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{r_1 - r_2}{2\lambda}\,\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right)$
Όπως βλέπουμε η σχέση αυτή παριστάνει Α.Α.Τ. με πλάτος Α' και φάση : $\varphi = 2\pi\left(\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{T}} - \frac{\mathbf{r_1 + r_2}}{\mathbf{2\lambda}}\right)$	$y = A'\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right)$ όπου $A' = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{r_1 - r_2}{2\lambda}\right)$ και $\lvert A' \rvert$ το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου Σ.
Ταχύτητα και επιτάχυνση των σημείων του μέσου	▸ Για $0 \le t < t_1 = \frac{r_1}{\upsilon}$ είναι $\upsilon = 0$ και $\alpha = 0$ ▸ Για $t_1 \le t < t_2 = \frac{r_2}{\upsilon}$ είναι $\upsilon = \omega A\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right)$ ▸ Για $t \ge t_2$ είναι $\upsilon = \omega A'\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right)$ και $\alpha = -\omega^2 y = -\omega^2 A'\ \eta\mu\ 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right)$
Ενίσχυση έχω όταν	$r_1 - r_2 = N\lambda$ όπου $N = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
Απόσβεση έχω όταν	$r_1 - r_2 = (2N + 1)\frac{\lambda}{2}$ όπου $N = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

<u>Υπερβολές ενισχυτικής και ακυρωτικής συμβολής</u>

Όλα τα σημεία ενισχυτικής και ακυρωτικής συμβολής βρίσκονται πάνω σε υπερβολές όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα:

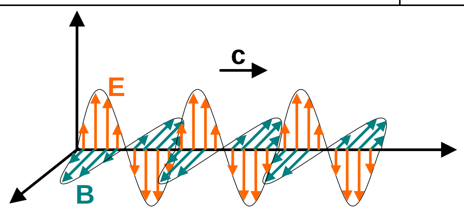


Όπως παρατηρούμε από το σχήμα ο αριθμός των υπερβολών ενίσχυσης που τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα $Π_1Π_2$ είναι **περιττός**, ενώ ο αντίστοιχος αριθμός των υπερβολών απόσβεσης είναι **ζυγός**.

ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ

Αρχή της επαλληλίας : $y = y_1 + y_2$

Εξίσωση του στάσιμου κύματος	$y = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{x}{\lambda} \eta\mu 2\pi \frac{t}{T}$
Ταχύτητα και επιτάχυνση των σημείων του μέσου	$\upsilon = \omega A'\sigma\upsilon\nu \frac{2\pi t}{T}$ $\alpha = -\omega^2 A'\eta\mu \frac{2\pi t}{T}$ όπου $A' = 2A\sigma\upsilon\nu \frac{2\pi\chi}{\lambda}$
Θέσεις Κοιλιών	$x = K\frac{\lambda}{2}$ όπου $K = 0,1,2,.....$
Θέσεις Δεσμών	$x = (2K+1)\frac{\lambda}{4}$ όπου $K = 0,1,2,.....$
Διαφορά φάσης των διαφόρων σημείων του μέσου	▸ <u>**ανάμεσα** σε δύο διαδοχικούς δεσμούς</u> ή όταν <u>μεταξύ δύο σημείων **δεν υπάρχει** δεσμός</u> ή υπάρχει <u>**άρτιος αριθμός δεσμών**</u> **: Δφ = 0** ▸ <u>**εκατέρωθεν** ενός δεσμού</u> ή αν <u>μεταξύ των σημείων **υπάρχει περιττός αριθμός δεσμών**</u> **: Δφ = π rad**

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ	
Σχέση εντάσεων ηλεκτρικού & μαγνητικού πεδίου	$\frac{E}{B}=c$ ή $\frac{E_{\max}}{B_{\max}}=c$ (ή υ αν το μέσο διάδοσης δεν είναι το κενό)
Εξισώσεις	$E=E_{\max}\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$ $B=B_{\max}\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$
	Στιγμιότυπο ηλεκτρομαγνητικού κύματος. Τα επίπεδα ταλάντωσης των εντάσεων είναι κάθετα μεταξύ τους αλλά κάθετα και στην ταχύτητα c του κύματος. Το ηλεκτρικό και το μαγνητικό κύμα είναι συμφασικά.
ΦΩΣ	
Θεμελιώδης εξίσωση των κυμάτων	$c=\lambda_0 f$ ή $\upsilon=\lambda f$ για το κενό — για μέσο διάφορο του κενού
Διάδοση απ' το κενό σε άλλο μέσο	$\lambda=\frac{\lambda_o}{n}$
Διάδοση απ' το μέσο 1 στο μέσο 2	$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{n_2}{n_1}$
Ανάκλαση	$\theta_r=\theta_\alpha$
Δείκτης διάθλασης Διάθλαση Νόμος του Snell	$n=\frac{c}{\upsilon}$, $n=\frac{\lambda_o}{\lambda}$ Όταν n↑ τότε υ↓ και λ↓ Ισχύει: n > 1 για κάθε υλικό αφού υ < c; n = 1 για το κενό και τον αέρα (προσεγγιστικά); Όσο μεγαλώνει το n τόσο (οπτικά) πυκνότερο είναι το σώμα $n_a\eta\mu\theta_a=n_b\eta\mu\theta_b$ νόμος του Snell
Κρίσιμη γωνία	$\eta\mu\theta_{crit}=\frac{n_b}{n_\alpha}=\frac{n_{\alpha\rho\alpha\iota o\tau\varepsilon\rho o\upsilon}}{n_{\pi\upsilon\kappa\nu o\tau\varepsilon\rho o\upsilon}}$ $(n_a>n_b)$
Ολική ανάκλαση	*Πρέπει : $\theta_a>\theta_{crit}$ και μετάβαση από πυκνότερο σε αραιότερο μέσο $(n_a>n_b)$.*

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

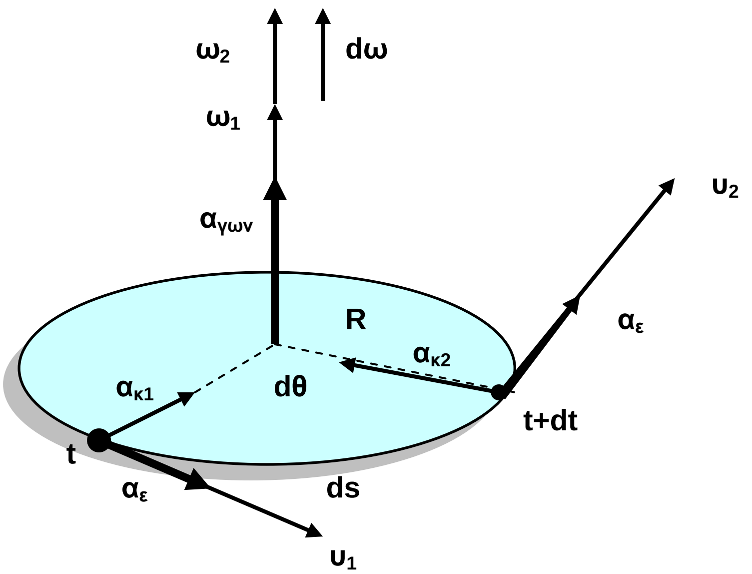
ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ ΤΗΣ ΣΤΡΟΦΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Γραμμικά μεγέθη:

1. **Γραμμική ταχύτητα υ:** Εκφράζει το ρυθμό διαγραφής των τόξων: $\upsilon = \frac{ds}{dt}$ (1).
2. **Επιτρόχιος επιτάχυνση α_ε:** Εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του μέτρου της γραμμικής ταχύτητας: $\alpha_\varepsilon = \frac{d\upsilon}{dt}$ (2).
3. **Κεντρομόλος επιτάχυνση α_κ :** Είναι υπεύθυνη για την αλλαγή της διεύθυνσης της γραμμικής ταχύτητας υ: $\alpha_\kappa = \frac{\upsilon^2}{r} = \omega^2 r$ (3).

Γωνιακά μεγέθη:

1. **Γωνιακή ταχύτητα ω:** Εκφράζει το ρυθμό διαγραφής των γωνιών: $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ (4).
2. **Γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu}$:** Εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας ω : $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt}$ (5).



Γωνιακή ταχύτητα	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$
Γραμμική ταχύτητα	$\upsilon = \frac{ds}{dt}$
Σχέση γραμμικής και γωνιακής ταχύτητας	$\upsilon = \frac{ds}{dt} = \frac{d(\theta R)}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = \omega R$
Γωνιακή επιτάχυνση	$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt}$

Γραμμική επιτάχυνση	$\alpha = \sqrt{\alpha_\kappa^2 + \alpha_\varepsilon^2}$
Κεντρομόλος επιτάχυνση	$\alpha_\kappa = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R$
Επιτρόχια επιτάχυνση	$\alpha_\varepsilon = \frac{d\upsilon}{dt}$
Σχέση επιτρόχιας και γωνιακής επιτάχυνσης	$a_{\varepsilon\pi} = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R = a_{\gamma\omega\nu} R$
Ομαλή στροφική κίνηση	$\alpha_{\gamma\omega\nu} = 0$, $\omega = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$, $\Delta\theta = \omega\Delta t$
Ομαλά μεταβαλλόμενη στροφική κίνηση	$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$, $\omega = \omega_o \pm \alpha_{\gamma\omega\nu} t$, $\Delta\theta = \omega_o t \pm \frac{1}{2} a_{\gamma\omega\nu} t^2$
Κύλιση τροχού	$\upsilon_{cm} = \upsilon_{\pi\varepsilon\rho} = \omega R$, $a_{cm} = a_{\pi\varepsilon\rho} = a_{\gamma\omega\nu} R$
Ροπή δύναμης	$\tau = Fl$
Ροπή ζεύγους δυνάμεων	$\tau = Fd$
Ισορροπία στερεού σώματος	$\Sigma\vec{F} = \vec{o} \Leftrightarrow \begin{cases} \Sigma F_x = o \\ \Sigma F_y = o \end{cases}$ και: $\Sigma\vec{\tau} = 0$
Ροπή αδράνειας	$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots.$
Θεώρημα **Steiner**	$I_p = I_{cm} + Md^2$
Θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης	$\Sigma\tau = I a_{\gamma\omega\nu}$
Στροφορμή υλικού σημείου	$L = pr$ ή $L = m\upsilon r$
Στροφορμή στερεού σώματος	$L = I\omega$
Στροφορμή συστήματος σωμάτων	$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 + \ldots$

Θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης (Γενικότερη διατύπωση)	$\Sigma\tau = \frac{dL}{dt}$
Θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης για σύστημα σωμάτων	$\Sigma\tau_{\varepsilon\xi} = \frac{dL_{\sigma\upsilon\sigma\tau}}{dt}$
Διατήρηση της στροφορμής	Αν $\Sigma\tau_{\varepsilon\xi} = 0 \Rightarrow \vec{L}$ = σταθερή άρα $\vec{L}_{\alpha\rho\chi} = \vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda}$ ή $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$
Κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$
Κινητική ενέργεια στη σύνθετη κίνηση	$K = \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$
Έργο ροπής για στοιχειώδη γωνιακή μετατόπιση	$dW = \tau \cdot d\theta$
Έργο σταθερής ροπής	$W = \tau\theta$
Ισχύς μιας δύναμης	$P = \tau\omega$
Θ.Μ.Κ.Ε.	$\Sigma W = \frac{1}{2}I\omega_{\tau\varepsilon\lambda}^2 - \frac{1}{2}I\omega_{\alpha\rho\chi}^2$

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΤΗΣ ΚΥΛΙΣΗΣ ΧΩΡΙΣ ΟΛΙΣΘΗΣΗ
αντιστοιχίσεις

ΓΙΑ ΤΗ ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ	ΓΙΑ ΤΗ ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ	
Μεταφορικά μεγέθη	**Γραμμικά μεγέθη**	**Γωνιακά μεγέθη**
x_{cm}	**S**	**θ**
$\upsilon_{cm}=\frac{dx_{cm}}{dt}$	$\upsilon_{\gamma\rho}$ ή $\upsilon=\frac{ds}{dt}$	$\omega=\frac{d\theta}{dt}$
$a_{cm}=\frac{d\upsilon_{cm}}{dt}$	$a_{\varepsilon\pi}=\frac{d\upsilon}{dt}$	$a_{\gamma\omega\nu}=\frac{d\omega}{dt}$
ΟΜΑΛΗ ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ	**ΟΜΑΛΗ ΣΤΡΟΦΙΚΗ**	
$\alpha_{cm}=0$, υ_{cm} = σταθερή , $x_{cm}=\upsilon_{cm}t$	$\alpha_{\varepsilon\pi}=0$, υ = σταθ $\alpha_{\kappa}=\upsilon^2/r=\omega^2 r$ $s=\upsilon t$	$\alpha_{\gamma\omega\nu}=0$, ω = σταθ θ = ωt
Ομαλά μεταβαλλόμενη μεταφορική	**Ομαλά μεταβαλλόμενη στροφική**	
α_{cm} = σταθερή $\upsilon_{cm}=\upsilon_0\pm\alpha_{cm}t$ $x_{cm}=\upsilon_o t\pm\frac{1}{2}a_{cm}t^2$	$\alpha_{\varepsilon\pi}$ = σταθερή $\upsilon=\upsilon_0\pm\alpha_{\varepsilon\pi}t$ $\Delta s=\upsilon_o t\pm\frac{1}{2}a_{\varepsilon\pi}t^2$	$\alpha_{\gamma\omega\nu}$ = σταθερή $\omega=\omega_o\pm\alpha_{\gamma\omega\nu}t$ $\Delta\theta=\omega_o t\pm\frac{1}{2}a_{\gamma\omega\nu}t^2$
$\boldsymbol{\chi_{cm}=S=\theta R}$ $\boldsymbol{\upsilon_{cm}=\upsilon=\omega R}$ $\boldsymbol{\alpha_{cm}=\alpha_{\varepsilon\pi}=\alpha_{\gamma\omega\nu}R}$	Σχέσεις μεταφορικών γραμμικών και γωνιακών μεγεθών για να έχω κύλιση χωρίς ολίσθηση	
Δύναμη **F**	Ροπή **τ**	
Μάζα αδράνειας **m**	Ροπή αδράνειας **I**	
ΣF = 0 ⇔ υ = 0 ή υ = σταθερή	Στ = 0 ⇔ ω = 0 ή ω = σταθερή (Ισορροπία)	
$\Sigma F=m\alpha_{cm}$	$\Sigma\tau=I\alpha_{\gamma\omega\nu}$ (θεμελιώδης νόμος)	
Ορμή **P** = mυ	Στροφορμή **L** = Ιω	
$\frac{dp}{dt}=\Sigma F$	$\frac{dL}{dt}=\Sigma\tau$	
ΑΔΟ αν $\Sigma F_{\varepsilon\xi}=0\Rightarrow\vec{p}$ = σταθερή	ΑΔΣτροφορμής αν $\Sigma\tau_{\varepsilon\xi}=0\Rightarrow\vec{L}$ = σταθερή	
Αν F = σταθερή $W_F=\pm Fx$	Αν τ = σταθερή $W_{\tau F}=\pm\tau\theta$	
$\frac{dW_F}{dt}=P_F=\pm F\upsilon$	$\frac{dW_{\tau_F}}{dt}=P_F=\pm\tau\omega$	
$K_{\mu\varepsilon\tau}=\frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2$	$K_{\sigma\tau\rho o\varphi}=\frac{1}{2}I\omega^2$	
ΘΜΚΕ $\frac{1}{2}m\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}^2-\frac{1}{2}m\upsilon_{\alpha\rho\chi}^2=\Sigma W_F$	ΘΜΚΕ $\frac{1}{2}I\omega_{\tau\varepsilon\lambda}^2-\frac{1}{2}I\omega_{\alpha\rho\chi}^2=\Sigma W_\tau$	
ΘΜΚΕ για τη ΣΥΝΘΕΤΗ κίνηση $(\frac{1}{2}m\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}^2+\frac{1}{2}I\omega_{\tau\varepsilon\lambda}^2)-(\frac{1}{2}m\upsilon_{\alpha\rho\chi}^2+\frac{1}{2}I\omega_{\alpha\rho\chi}^2)=\Sigma W_F+\Sigma W_\tau$		

ΚΡΟΥΣΕΙΣ

Διατήρηση της ορμής σε σύστημα σωμάτων	Αν $\Sigma\vec{F}_{\varepsilon\xi}=0 \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt}=0 \Rightarrow \vec{p}=\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta}$
Κεντρική ελαστική κρούση δύο σφαιρών	$\upsilon_1^{'}=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1+\frac{2m_2}{m_1+m_2}\upsilon_2$ και $\upsilon_2^{'}=\frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1+\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\upsilon_2$
Κεντρική ελαστική κρούση δύο σωμάτων με δεύτερο σώμα ακίνητο	Αν $\upsilon_2 = 0$ τότε $\upsilon_1^{'}=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1$ και $\upsilon_2^{'}=\frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1$
Απώλεια ενέργειας στην πλαστική κρούση	$E_{\alpha\pi\omega\lambda} = Q_\theta = K_{(o\lambda)\Pi PIN} - K_{(o\lambda)META}$
Ποσοστό % απώλειας ενέργειας στην πλαστική κρούση	$\pi\% = \frac{E_{\alpha\pi\omega\lambda}}{K_{(o\lambda)\Pi PIN}} 100\%$

ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ Doppler	
Παρατηρητής πλησιάζει	Αντιλαμβάνεται $\upsilon_{\sigma\chi,\eta\chi,A} = \upsilon + \upsilon_A$ Και $\boxed{f_A = \dfrac{\upsilon+\upsilon_A}{\upsilon} f_S}$
Παρατηρητής απομακρύνεται	Αντιλαμβάνεται $\upsilon_{\sigma\chi,\eta\chi,A} = \upsilon - \upsilon_A$ Και $\boxed{f_A = \dfrac{\upsilon-\upsilon_A}{\upsilon} f_S}$
Πηγή πλησιάζει	Αντιλαμβάνεται $\lambda_A = \lambda - \upsilon_S T$ Και $\boxed{f_A = \dfrac{\upsilon}{\upsilon-\upsilon_S} f_S}$
Πηγή απομακρύνεται	Αντιλαμβάνεται $\lambda_A = \lambda + \upsilon_S T$ Και $\boxed{f_A = \dfrac{\upsilon}{\upsilon+\upsilon_S} f_S}$
Όλες οι περιπτώσεις $\dfrac{\dfrac{+A\ \pi\lambda\eta\sigma\iota\acute{\alpha}\zeta\varepsilon\iota}{-A\ \alpha\pi o\mu\alpha\kappa\rho\acute{\upsilon}\nu\varepsilon\tau\alpha\iota}}{\dfrac{-S\ \pi\lambda\eta\sigma\iota\acute{\alpha}\zeta\varepsilon\iota}{+S\ \alpha\pi o\mu\alpha\kappa\rho\acute{\upsilon}\nu\varepsilon\tau\alpha\iota}}$	$\boxed{f_A = \dfrac{\upsilon\pm\upsilon_A}{\upsilon\mp\upsilon_S} f_S}$